



# پایه دوازدهم ریاضی

## آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



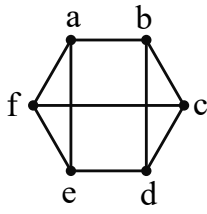
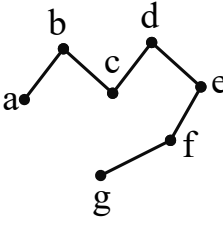
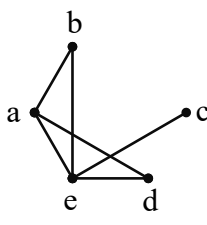
دفترچه سؤال  
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	ریاضیات گسسته	۲	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

سؤالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۲		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز		
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)			
۱	<p><b>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید:</b></p> <p>الف) مجموع سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.</p> <p>ب) برای اعداد صحیح <math>a, b</math> و <math>c</math> که <math>a \neq 0</math>، اگر <math>a b+c</math>، آن گاه <math>a c</math> یا <math>a b</math>.</p> <p>ج) تعداد یالهای هر گراف، نصف مجموع درجات رأسهای آن گراف است.</p> <p>د) گرافی ۸- منتظم از مرتبه ۱۰ وجود ندارد.</p>			
۲	<p><b>جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.</b></p> <p>الف) اگر <math>p</math> عددی اول باشد و <math>a \in \mathbb{Z}</math> و <math>a \nmid p</math>، <math>(p, a) = \dots\dots\dots</math></p> <p>ب) حاصل <math>[m^{12}, (m^4, m^6)]</math> برابر <math>\dots\dots\dots</math> است.</p> <p>ج) اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را <math>\dots\dots\dots</math> می نامیم.</p> <p>د) گراف ۳- منتظم، ۸ رأسی دارای <math>\dots\dots\dots</math> یال است.</p>			
۳	<p><b>در هر قسمت گزینه صحیح را از میان گزینههای داده شده انتخاب کنید و در پاسخ برگ بنویسید.</b></p> <p>الف) اگر یازدهم دی ماه سالی چهارشنبه باشد، سوم خرداد ماه آن سال چه روزی بوده است؟                      (۱) چهارشنبه (۲) پنجشنبه (۳) جمعه (۴) دوشنبه</p> <p>ب) معادله <math>ax \equiv b \pmod{m}</math> دارای جواب است، اگر و تنها اگر <math>\dots\dots\dots</math>.</p> <p>(۱) <math>(a, m)   b</math> (۲) <math>(a, b) = 1</math> (۳) <math>(b, m)   a</math> (۴) <math>(a, b)   m</math></p>			
۱/۵	<p><b>در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید.</b></p> <p>الف) اگر <math>n</math> عددی فرد باشد، حاصل <math>n^2 - 5n + 7</math> عددی فرد است.</p> <p>ب) برای هر دو عدد حقیقی <math>x</math> و <math>y</math> داریم: <math>\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}</math>.</p>			
۱/۵	<p><math>A = \{3, 4\}</math> یک زیرمجموعه از مجموعه <math>S = \{1, 2, \dots, 6\}</math> است و <math>n \in S</math>، اگر <math>\frac{n^2(n+1)^2}{4}</math> یک عدد زوج باشد، ثابت کنید <math>n \in A</math>.</p>			
۱	<p>ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.</p>			
۱/۵	<p>ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت <math>x</math> و <math>y</math> داریم: <math>(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(x+y) \geq 4</math></p>			
۱/۵	<p>اگر عدد طبیعی <math>a</math> دو عدد <math>(9k+7)</math> و <math>(7k+6)</math> را عاد کند، ثابت کنید: <math>a = 5</math> یا <math>a = 1</math>.</p>			
۱/۵	<p>اگر <math>a</math> عددی صحیح و فرد باشد و <math>a+2   b</math>، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد <math>(a^2 + b^2 + 3)</math> بر ۸ را بیابید.</p>			
۱/۵	<p>رقم یکان عدد <math>A = 1! + 2! + 3! + \dots + 500!</math> را به دست آورید.</p>			
۱/۵	<p>همه اعداد صحیحی را بیابید که سه برابر آنها منهای ۱۳ بر ۷ بخش پذیر باشند.</p>			
	صفحه ۱ از ۲			

ردیف	سوالات (پاسخ برگ دارد)	نمره
<p>سوالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته پایه: دوازدهم رشته: ریاضی و فیزیک تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴</p> <p>تعداد صفحه: ۲ مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه ساعت شروع: نام و نام خانوادگی: گروه آموزشی ماز</p>		
۱۲	<p>به چند طریق می توان ۲۹۰۰۰ تومان را به اسکناس های ۲۰۰۰ و ۵۰۰۰ تومانی تبدیل کرد؟</p>	۱/۵
۱۳	<p><b>گراف G در شکل روبه رو مفروض است:</b>                      الف) حاصل <math>\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(c)</math> را به دست آورید.                      ب) مجموعه <math>N_G(b) \cap N_G[e]</math> را مشخص کنید.                      ج) دو دور با طول ۶ در این گراف بنویسید.                      د) تعداد یال های مکمل گراف G را بیابید.                      (ارائه راه حل برای پاسخ هر قسمت الزامی است).</p> 	۱
۱۴	<p><b>گراف <math>P_n</math> به شکل مقابل است:</b>                      الف) <math>n</math> چقدر است؟                      ب) <math>N_G(e)</math> را بنویسید.                      ج) <math>N_G[a]</math> را بنویسید.                      د) در این گراف چند مسیر به طول ۵ وجود دارد.</p>  <p>(G)</p>	۱
۱۵	<p><b>در گراف ۵-منتظم G، از مرتبه p و اندازه q، رابطه <math>4q - 7p = 30</math> برقرار است.</b>                      الف) p و q را بیابید.                      ب) چند یال به گراف G اضافه کنیم تا گراف <math>K_p</math> حاصل شود؟</p>	۱
۱۶	<p><b>گراف G به شکل مقابل مفروض است:</b>                      الف) دوری به طول ۴ در آن بنویسید.                      ب) مکمل G همبند است یا ناهمبند؟ چرا؟</p>  <p>(G)</p>	۱
۲۰	موفق باشید.	
	صفحه ۲ از ۲	



# پایه دوازدهم ریاضی

## آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



پاسخبرگ ریاضیات گسسته

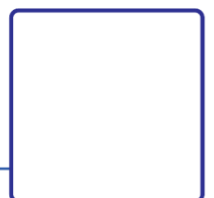
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

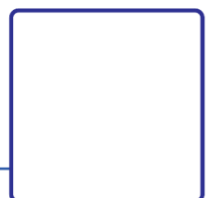
ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱	الف) ..... (ب) ..... (ج) ..... (د) .....	۱
۲	الف) ..... (ب) ..... (ج) ..... (د) .....	۱
۳	(ب)	۱
۴	الف) ..... ب) .....	۱/۵
۵		۱/۵
۶		۱



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۷		۱/۵
۸		۱/۵
۹		۱/۵
۱۰		۱/۵



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۱		۱/۵
۱۲		۱/۵
۱۳	الف) ب) ج) د)	۱



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۴	آزمون شبهه ساز نهایی درس: ریاضیات گسسته
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۴	(الف)  (ب)  (ج)  (د)	۱
۱۵	(الف)  (ب)	۱
۱۶	(الف)  (ب)	۱
	موفق باشید.	۲۰





# پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

ویراستاران

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک  
حمیدرضا ولی‌پور

طراحان

سید جواد نظری - محدثه شیخعلی

درس

ریاضیات گسسته

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

# زودبیسست

## مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

## بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

## نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

## ۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

## نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.





## تیم اجرایی و تولید آزمون


مرضیه بنیانی	یگانه پوراابراهیم	زهره جعفری
محدثه شیخعلی	محدثه عربگری	ساره محمدعلی نسب

## سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

## دکتر رسول خنجری

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته		رشته: ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴	ساعت شروع:
آزمون شبه‌ساز امتحان نهایی		مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
گروه آموزشی ماز		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
	<p><b>مصحح شو</b> </p> <p>الف) درست (۰.۲۵) (صفحه ۳)      ب) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۱۱)</p> <p>ج) درست (۰.۲۵) (صفحه ۳۹)      د) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۴۰)</p> <p><b>بررسی دقیق‌تر:</b> </p> <p>الف) اگر <math>k, k+1, k+2, k \in \mathbb{N}</math> سه عدد طبیعی متوالی باشند، داریم:</p> $k+k+1+k+2=3k+3=3(k+1)$ <p>پس مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.</p> <p>ب) مثال نقض: <math>a=2, b=5, c=3</math>، آن‌گاه <math>2 \mid 5+3</math> ولی <math>2 \nmid 3</math> و <math>2 \nmid 5</math>.</p> <p>ج) اگر درجه هر رأس <math>v_i</math> را با <math>\deg v_i</math> نمایش دهیم و گراف <math>n</math> رأسی باشد:</p> $\sum_{i=1}^n \deg v_i = 2q(G)$ <p>که <math>q(G)</math> برابر تعداد یال‌های گراف <math>G</math> است.</p> <p>د) گراف فرد منتظم از مرتبه فرد نداریم. تعداد گراف‌های ۸- منتظم از مرتبه ۱۰ با تعداد گراف‌های ۱- منتظم از مرتبه ۱۰ برابر است.</p>	
	<p><b>سبز بودی یا قرمز؟</b> بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه </p>	
	<p><b>بخش پذیری</b> </p> <p>عدد صحیح <math>b</math> را بر عدد صحیح و مخالف صفر <math>a</math> بخش‌پذیر گوئیم هرگاه عدد صحیحی مانند <math>q</math> وجود داشته باشد به طوری که: <math>b = aq</math></p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; width: 150px;">عدد <math>a</math> شمارنده عدد <math>b</math> است.</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; width: 150px;">عدد <math>a</math>، عدد <math>b</math> را می‌شمارد.</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; width: 150px;">عدد <math>b</math> بر <math>a</math> بخش‌پذیر است.</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; width: 150px;">عدد <math>b</math> مضرب <math>a</math> است.</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; width: 150px;">عدد <math>a</math>، مقسوم‌علیه <math>b</math> است.</div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; width: 100px; text-align: center;">یعنی <math>a \mid b</math></div> </div>	

ویژگی‌های رابطه عاد کردن 

- $a|b \rightarrow \begin{cases} a|-b \\ -a|b \\ -a|-b \end{cases}$
- $a|b \rightarrow a|mb$
- $a|b \rightarrow a|b^n : (n \in \mathbb{N})$
- $a|b \wedge b|c \rightarrow a|c$
- $a|b \wedge a|c \rightarrow a|b \pm c \xrightarrow{\text{تعمیم}} a|b \wedge a|c \rightarrow a|mb \pm nc$
- $a|b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b| \xrightarrow{\text{نتیجه}} a|b \wedge b|a \rightarrow a = \pm b$
- $a|b \rightarrow a^n|b^n$
- $a|b \wedge c|d \rightarrow ac|bd$
- $a|b \xrightarrow{n \leq m} a^n|b^m$

مصحح شو 

- الف) ۱ (۰.۲۵) (صفحه ۱۷)
- ب)  $m^{12}$  (۰.۲۵) (صفحه ۱۷)
- ج) طوقه (۰.۲۵) (صفحه ۳۶)
- د) ۱۲ (۰.۲۵) (صفحه ۳۵)

بررسی دقیق‌تر: 

الف)  $a=3$  و  $p=2$  در شرایط سوال صدق می‌کنند ( $p|a, a \in \mathbb{Z}$ ) و می‌دانیم  $(2, 3) = 1$ .  
 ب) قدم به قدم از داخلی‌ترین ب.م.م (ک.م.م) شروع می‌کنیم:  $(m^4, m^6) = m^4$

۱  $\Rightarrow [m^{12}, m^4] = m^{12}$

د) می‌دانیم در هر گراف، نصف مجموع درجات رئوس برابر تعداد یال‌های گراف است، حال چون گراف ۸ رأس از درجه ۳ دارد، بنابراین:

$$\sum_{i=1}^8 \deg v_i = 3 \times 8 = 2q(G) \Rightarrow q(G) = 12$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه 

مصحح شو 

- الف) جمعه (گزینه ۳) (۰.۵) (صفحه ۳۰) ب)  $(a, m)|b$  (گزینه ۱) (۰.۵) (صفحه ۲۵)


بررسی دقیق‌تر: 

الف) باید حساب کنیم از ۳ خرداد تا ۱۱ دی، چند روز سپری شده و باقی‌مانده آن را بر ۷ حساب کنیم:

$$28 + 3 \times 31 + 3 \times 30 + 11 \equiv 0 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \equiv 5$$

$\swarrow$   $\searrow$   
 خرداد ۳۱ روزه!      تابستان

بنابراین اگر ۱۱ دی چهارشنبه باشد، ۳ خرداد ۵ روز قبل (جمعه) بوده است.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه 

مصّحح شو

الف) روش اول: (صفحه ۴)

فرض:  $n = 2k + 1$  عدد فرد (۰.۲۵) حکم:  $n^2 - 5n + 7$  فرد

$$n^2 - 5n + 7 = (2k + 1)^2 - 5(2k + 1) + 7 = 4k^2 + 4k + 1 - 10k - 5 + 7 \quad (۰.۲۵)$$

$$= 4k^2 - 6k + 3 = 2(\underbrace{2k^2 - 3k + 1}_{(۰.۲۵)k''}) + 1 = 2k'' + 1$$

پس  $n^2 - 5n + 7$  عددی فرد است. (۰.۲۵)

روش دوم: فرض:  $n \equiv 1 \pmod{2}$  حکم:  $n^2 - 5n + 7 \equiv 1 \pmod{2}$

$$n \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow \begin{cases} n^2 \equiv 1 \pmod{2} \\ -5n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases} \Rightarrow n^2 - 5n \equiv 0 \pmod{2} \Rightarrow n^2 - 5n + 7 \equiv 1 \pmod{2} \quad (۰.۲۵)$$

روش سوم:

$$n^2 - 5n + 7 = (n - 2)(n - 3) + 1 \quad (۰.۲۵)$$

$$n^2 - 5n + 7 = k(k + 1) + 1$$

حال با فرض  $n - 3 = k$  داریم:

و می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد متوالی همواره زوج است (۰.۵)، بنابراین:  $k(k + 1) = 2k''$  و داریم:

$$n^2 - 5n + 7 = 2k'' + 1 \quad (۰.۲۵)$$

روش چهارم: برهان خلف: فرض کنیم  $n^2 - 5n + 7$  زوج باشد (۰.۲۵)، بنابراین  $n^2 - 5n$  فرد بوده و بنابراین،  $n(n - 5)$  (۰.۲۵)

فرد بوده ولی چون  $n$  فرد است،  $n - 5$  زوج شده و این تناقض با فرد بودن  $n^2 - 5n$  می‌باشد و در نتیجه فرض خلف (۰.۲۵)

(زوج بودن  $n^2 - 5n + 7$ ) باطل است.

روش پنجم: از آن جا که  $n$  فرد است،  $n - 3$  زوج است و بنابراین:

$$2 \mid n - 3 \Rightarrow 2 \mid (n - 3)(n - 2) \Rightarrow 2 \mid n^2 - 5n + 6 \Rightarrow 2 \mid n^2 - 5n + 7 \quad (۰.۲۵)$$

(۰.۵)

(نتیجه آخر از آن جا حاصل می‌شود که از بین دو عدد متوالی، ۲ فقط یکی را عاد می‌کند.)

(ب) این گزاره نادرست است. (صفحه ۳)

$$x = 1, y = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \neq 2 \quad (۰.۵)$$

مثال نقض:

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

ویژگی‌های رابطه هم‌نهشتی 

$a \equiv b \rightarrow a \pm c \equiv b \pm c$

$a \equiv b \rightarrow ac \equiv bc$

$a \equiv b \rightarrow a^n \equiv b^n; (n \in \mathbb{N})$

$$\begin{cases} a \equiv b \\ c \equiv d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ac \equiv bd \\ a + c \equiv b + d \\ a - c \equiv b - d \end{cases}$$

$a \equiv b, b \equiv c \rightarrow a \equiv c$

$a \equiv b \rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$

$ac \equiv bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \equiv b \xrightarrow{\text{نتیجه}} ac \equiv bc \xrightarrow{(c,m)=1} a \equiv b$

$a \equiv b \xrightarrow{n|m} a \equiv b$

$a \equiv b, b \equiv c \xrightarrow{(m,n)=d} a \equiv c$

**توجه:** اگر باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر  $m$  برابر  $r$  باشد، در این صورت داریم  $a \equiv r \pmod{m}$  به عبارت دیگر:

$a = mq + r \Leftrightarrow a \equiv r \pmod{m}$

**توجه:** هرگاه دو عدد  $a$  و  $b$  در تقسیم بر عدد طبیعی  $m$ ، هم‌باقی‌مانده باشند، داریم:  $a \equiv b \pmod{m}$

راهنمای مصحح: 

قسمت «ب» جواب‌های درست دیگری نیز دارد و به جواب‌های درست نمره تعلق می‌گیرد.


مصحح شو 

(صفحه ۵) فرض:  $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$  زوج و  $n \in S$  حکم:  $n \in A$

$$2 \mid \frac{(n(n+1))^2}{4} \Rightarrow 2 \mid \frac{4k^2}{4} \Rightarrow 2 \mid k^2 \quad (0.25)$$












از آن جا که  $2 \mid k^2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  پس  $2 \mid k$  یعنی باید نصف حاصل ضرب  $n$  و  $n+1$ ، همچنان بر ۲ بخش پذیر باشد. (۰.۲۵)

یا به عبارتی،  $4 \mid n(n+1)$  و چون  $n \in S$ ، بنابراین:  $n = \{3, 4\}$  که یعنی  $n \in A$  (۰.۲۵).

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 

راهنمای مصحح: 

اگر از اثبات با بررسی تمام حالت‌ها، استفاده شده نیز، نمره کامل تعلق می‌گیرد.

	<p>نقشه نهایی: </p> <p>اگر از روش خاصی از اثبات، مثلاً برهان خلف، اثبات با تمام حالت‌ها و ... استفاده می‌کنید، حتماً حتماً ابتدای راه‌حل‌تون ذکر کنید!</p>	
۱	<p>مصحح شو </p> <p>(صفحه ۵) برهان خلف، فرض می‌کنیم <math>r \in \mathbb{Q}</math> و <math>a \in \mathbb{Q}^c</math>، حال طبق فرض خلف <math>a+r=g</math> گویاست، حال چون <math>(0.25)</math></p> <p>(0.5) <math>-r \in \mathbb{Q}</math>, <math>a = (a+r) - r = g - r</math>، می‌دانیم حاصل جمع دو عدد گویا همواره گویاست، پس <math>a</math> گویا بوده و این خلاف فرض است. <math>(0.25)</math></p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه </p>	۶
۱/۵	<p>مصحح شو </p> <p>(صفحه ۷) از روش اثبات بازگشتی استفاده می‌کنیم. <math>(0.25)</math></p> $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y) \geq 4 \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1 \geq 4 \quad (0.25)$ $\Leftrightarrow \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{y^2 + x^2}{yx} \geq 2 \quad (0.25)$ $\Leftrightarrow y^2 + x^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (y-x)^2 \geq 0 \quad (0.25)$ <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه </p> <p>راهنمای مصحح: </p> <p>برای اشاره به برگشت‌پذیر بودن روابط و یا استفاده از نماد «<math>\Leftrightarrow</math>» <math>(0.25)</math> نمره لحاظ شده است.</p> <p>اثبات به روش بازگشتی </p> <p>در این روش از حکم مسئله شروع می‌کنیم و با فرض درستی حکم، به یک رابطه بدیهی یا فرض مسئله می‌رسیم. در استفاده از این روش برای ساده کردن حکم مسئله از گزاره‌های دوشروطی استفاده می‌کنیم.</p> <p>توجه: گزاره دوشروطی <math>A \Leftrightarrow B</math>، زمانی درست است که گزاره‌های <math>A</math> و <math>B</math> هم‌ارزش باشند.</p> <p>مسیر تمرینی: </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۴ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p> <p>نقشه نهایی: </p> <p>استفاده از نماد «<math>\Leftrightarrow</math>» یادتون نره!</p>	۷
۱/۵	<p>مصحح شو </p> $a \mid 9k + 7 \Rightarrow a \mid 63k + 49 \quad (0.25)$ $a \mid 7k + 6 \Rightarrow a \mid 63k + 54 \quad (0.25)$ $\Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a \in \{\pm 1, \pm 5\} \quad (12 \text{ صفحه}) \quad (0.25)$ <p>و چون <math>a \in \mathbb{N}</math>, <math>a = 1</math> یا <math>a = 5</math> <math>(0.25)</math> <math>(0.25)</math></p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه </p>	۸

**بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م)**

۱) عدد طبیعی  $d$  را ب.م.م دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  می‌نامیم ( $a$  و  $b$  هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم  $(a, b) = d$ ، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $d|a, d|b$
- $\forall m > 0; m|a, m|b \rightarrow m \leq d$

۲) اگر  $a|b$ ، داریم:  $(a, b) = |a|$

۳) اگر  $p$  عددی اول باشد و  $a \in \mathbb{Z}$  و  $p|a$ ، داریم:  $(p, a) = 1$

۴) اگر  $p$  و  $q$  هر دو اول باشند و  $p \neq q$  باشد، داریم:  $(p, q) = 1$

۵) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند، ببینید:

$$(m, m+1) = d \rightarrow \begin{cases} d|m \\ d|m+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} d|1 \rightarrow d=1$$

۶) دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول هستند، ببینید:

$$(2n-1, 2n+1) = d \rightarrow \begin{cases} d|2n-1 \\ d|2n+1 \end{cases} \xrightarrow[\text{سمت راست}]{-} d|2 \rightarrow d=1 \text{ یا } d=2$$

از طرفی چون  $2n+1$  (یا  $2n-1$ ) عددی فرد است و یک عدد زوج نمی‌تواند یک عدد فرد را بشمارد  $2/2n+1$  و  $2/2n-1$ ، بنابراین  $d=2$  غیرقابل قبول است.

**کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک.م.م)**

۱) عدد طبیعی  $c$  را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر  $a$  و  $b$  می‌نامیم و می‌نویسیم  $[a, b] = c$ ، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

- $a|c, b|c$
- $\forall m > 0; a|m, b|m \rightarrow c \leq m$

۲) اگر  $a|b$  داریم:  $[a, b] = |b|$

**مسیر تمرینی:**

مشابه این سوال در سوال ۴ امتحان نهایی ۱۴۰۳ مطرح شده بود.

**مصطح شو**

(صفحه ۱۶) روش اول:







اگر  $a$  عددی صحیح و فرد باشد،  $a+2$  نیز صحیح و فرد است و چون  $b|a+2$ ، پس  $b$  نیز صحیح و فرد است. (۰.۲۵)

حال از تمرینات کتاب درسی، می‌دانیم مربع اعداد فرد به پیمانه ۸ باقی‌مانده ۱ دارند (۰.۲۵)، بنابراین:

$$a^2 \equiv 1 \pmod{8}, b^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{8} \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 \equiv 5 \pmod{8}$$

روش دوم:

$a$  عددی صحیح و فرد است، یعنی  $a = 2k + 1$ ، پس  $a + 2 = 2k' + 1$  نیز فرد و در نتیجه  $b$  فرد است، پس  $b = 2k'' + 1$ .

	<p>حال داریم:</p> $a = 2k + 1, b = 2k' + 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 \equiv (2k+1)^2 + (2k'+1)^2 + 3 \pmod{5} \quad (0.25)$ $\equiv 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 + 3 \equiv 4k(k+1) + 4k'(k'+1) + 5 \pmod{5} \quad (0.25)$ $\equiv 4g + 4g' + 5 \equiv 5 \pmod{5} \quad (0.25)$ <p>(0.5)</p> <p> سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه</p>	
<p>۱/۵</p>	<p> مصحح شو</p> <p>(صفحه ۲۹) برای محاسبه رقم یکان، کافی است باقی مانده عدد را در پیمانه ۱۰ محاسبه کنیم (۰.۲۵) همچنین برای <math>n \geq 5</math>، <math>10   n!</math> و بنابراین:</p> $A = 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 10! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3 \pmod{10} \quad (0.25)$ <p>(0.25)</p> <p>بنابراین رقم یکان عدد A برابر ۳ است. (۰.۲۵)</p> <p> سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه</p>	<p>۱۰</p>
<p>۱/۵</p>	<p> مصحح شو</p> <p>(صفحه ۳۰) به دنبال همه اعداد صحیح k هستیم به طوری که <math>3k - 13 \equiv 0 \pmod{7}</math></p> $3k - 13 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow 3k \equiv 6 \pmod{7} \xrightarrow{(3,7)=1} k \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow k = 7g + 2 \quad (0.25)$ <p>(0.25)</p> <p>پس k در پیمانه ۷ باقی مانده ۲ دارد، پس تمام کلاس <math>[2]_7</math> جواب های ما هستند. (۰.۲۵)</p> <p> سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه</p>	<p>۱۱</p>
<p>۱/۵</p>	<p> مصحح شو</p> <p>(صفحه ۲۹) روش اول: معادله سیاله مربوطه را می نویسیم:</p> $2000x + 5000y = 29000 \Rightarrow 2x + 5y = 29 \Rightarrow 5y \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow y \equiv 1 \pmod{2} \quad (0.25)$ <p>(0.25)</p> <p>و بنابراین: <math>y = 2k + 1</math> و داریم:</p> $2x + 5(2k + 1) = 29 \Rightarrow 2x + 10k + 5 = 29 \Rightarrow x = 12 - 5k \quad (0.25)$ <p>(0.25)</p> <p>حال چون <math>x, y \geq 0</math>، پس: <math>12 - 5k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{12}{5}</math> (۰.۲۵)</p> <p>و <math>2k + 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{1}{2}</math> و <math>(x, y) = (2, 5)</math> و <math>(x, y) = (7, 3)</math> و <math>(x, y) = (12, 1)</math> جواب ۳ یعنی <math>k = 0, 1, 2</math> پس <math>k = 0, 1, 2</math> که یعنی ۳ جواب داریم. (۰.۲۵)</p>	<p>۱۲</p>

روش دوم: معادله سیاله مربوطه را می‌نویسیم:

$$2000x + 5000y = 29000 \Rightarrow 2x + 5y = 29 \Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{5} \xrightarrow{(2,5)=1} x \equiv 2 \pmod{5} \quad (0.25)$$

$$x = 5k + 2 \Rightarrow 2(5k + 2) + 5y = 29 \quad (0.25) \Rightarrow 5y = 25 - 10k \Rightarrow y = 5 - 2k \quad (0.25)$$

$$5 - 2k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{5}{2} \quad (0.25)$$

حال چون  $x, y \geq 0$ ، پس:

و  $5k + 2 \geq 0 \Rightarrow k \geq -\frac{2}{5}$  پس  $k = 0, 1, 2$  که یعنی ۳ جواب  $(x, y) = (2, 5)$  و  $(x, y) = (7, 3)$  و  $(x, y) = (12, 1)$  را داریم.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

### معادله هم‌نهشتی

یک رابطه هم‌نهشتی به همراه مجهولی مانند  $x$  به فرم  $ax \equiv b \pmod{m}$  را یک معادله هم‌نهشتی می‌گوییم و منظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌هایی چون  $x \in \mathbb{Z}$  است که در این معادله صدق می‌کنند.

**قضیه:** معادله هم‌نهشتی  $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است اگر و تنها اگر  $(a, m) | b$ .

**نتیجه قضیه:** در معادله هم‌نهشتی  $ax \equiv b \pmod{m}$ ، اگر  $(a, m) = 1$  باشد، معادله همواره دارای جواب است.  
**توجه:** اگر در معادله هم‌نهشتی ضریب  $x$  عددی غیر از یک باشد برای رسیدن به جواب‌های عمومی معادله، ابتدا باید به کمک ویژگی‌های هم‌نهشتی ضریب  $x$  را حذف کنیم.

### معادله سیاله

به معادله  $ax + by = c$ ;  $(a, b, c \in \mathbb{Z})$  معادله سیاله درجه اول (خطی) می‌گوییم هرگاه جواب‌های این معادله (یعنی  $x$  و  $y$ ) در اعداد صحیح باشند.

**توجه:** شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله  $ax + by = c$  جواب داشته باشد این است که:  $(a, b) | c$ .

**مثال:** آیا معادله سیاله  $4x + 6y = 9$  جواب صحیح دارد؟ دلیل بیاورید.

خیر. زیرا  $2 = (4, 6) \nmid 9$ .

### حل معادله سیاله با تبدیل آن به معادله هم‌نهشتی

ابتدا معادله سیاله را به یکی از دو صورت زیر تبدیل به معادله هم‌نهشتی می‌کنیم:

$$ax + by = c \rightarrow \begin{cases} |b| \\ ax \equiv c \\ |a| \\ by \equiv c \end{cases}$$

سپس معادله هم‌نهشتی موردنظر را حل کرده و جواب به‌دست آمده را در معادله سیاله قرار داده و با حل آن جواب دیگر را به‌دست می‌آوریم.

### مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی ۱۴۰۳ مطرح شده بود.

### نقشه نهایی:

حواستون باشه برای این سوال معادله سیاله، همه مراحل حل رو بنویسین!

مصّحح شو

$$\deg_G(a) + \deg_{\bar{G}}(c) = 3 + 2 = 5 \quad (0.25)$$

الف) (صفحه ۳۹)

توجه کنید که  $\deg_{\bar{G}}(c)$  یعنی درجه رأس  $c$  در گراف  $\bar{G}$  (مکمل گراف  $G$ ). از آن جا که  $G$ ، ۶ رأسی بوده، پس:

$$\deg_G(c) = 3, \deg_{\bar{G}}(c) + \deg_G(c) = 5 \Rightarrow \deg_{\bar{G}}(c) = 2$$

$$N_G(b) = \{a, c, d\}, N_G[e] = \{e, a, d, f\} \Rightarrow N_G(b) \cap N_G[e] = \{a, d\} \quad (0.25) \quad \text{ب)}$$

ج) دوره‌های  $abcdefa, cfeabdc$  (۰.۲۵)

راهنمای مصّحح:

به هر دور به طول ۶ دیگر، نمره تعلق می‌گیرد.

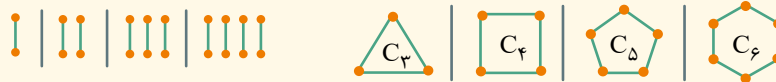
د) گراف  $G$  -۳ منتظم از مرتبه ۶ است، پس گراف مکمل آن -۲ منتظم خواهد بود. بنابراین:

$$\sum_{v_i \in V(\bar{G})} \deg v_i = 2 \times 6 = 2q(\bar{G}) \Rightarrow q(\bar{G}) = 6 \quad (0.25)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه

همه چیز درباره گراف

گراف ساده‌ای که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر عدد  $K$  باشند، گراف  $K$ -منتظم می‌نامیم. بدیهی است که در هر گراف  $K$ -منتظم، رابطه  $\Delta = \delta = K$  برقرار است و برعکس.



اگر دنباله درجات گرافی، تشکیل دنباله حسابی یا هندسی بدهند، گراف منتظم است.

گراف  $n$ -منتظم را که هیچ یالی ندارد گراف تهی می‌نامند و یک گراف تهی  $n$  رأسی را با  $\bar{K}_n$  نشان می‌دهند.



♦ اگر  $G$  یک گراف  $K$ -منتظم از مرتبه  $p$  با اندازه  $q$  باشد، آن‌گاه اندازه گراف  $G$  از رابطه مقابل به دست می‌آید:  $p \times K = 2q$

♦ تعداد دوره‌های به طول  $m$  در گراف کامل مرتبه  $p$  برابر  $\frac{(p-1)!}{2}$  است.

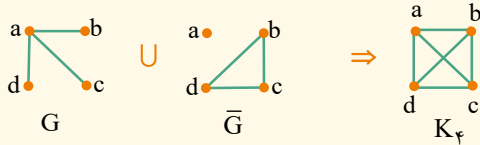
♦ تعداد اعدادی که کوچک‌تر مساوی  $n$  هستند و بر  $k$  بخش پذیرند برابر  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  است.

**مکمل گراف** 

مکمل گراف  $G$  که آن را با  $G^c$  یا  $\bar{G}$  نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعهٔ رئوس آن همان مجموعهٔ رئوس گراف  $G$  است و بین دو رأس  $\bar{G}$  یک یال است اگر و تنها اگر بین همان دو رأس از  $G$  یالی وجود نداشته باشد، به عبارت دیگر: رأس‌های گراف  $\bar{G}$ ، همان رأس‌های گراف  $G$  است ولی یال‌هایش، یال‌هایی هستند که  $G$  آن‌ها را ندارد.



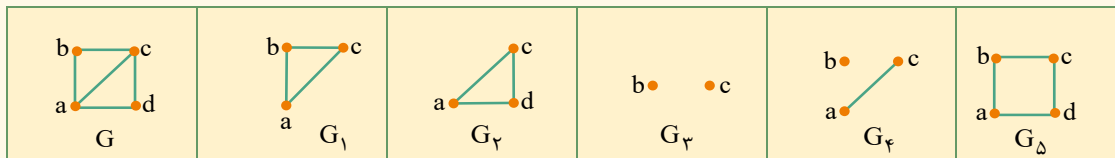
از روی هم قرار دادن یک گراف مانند  $G$  و مکمل آن یعنی  $\bar{G}$ ، یک گراف کامل به دست می‌آید.



اگر گراف  $\bar{G}$  مکمل گراف  $G$  باشد، گراف  $G$  نیز مکمل گراف  $\bar{G}$  است.

**زیرگراف** 

اگر  $G$  یک گراف ساده باشد، در این صورت یک زیرگراف از گراف  $G$  گراف‌یست که مجموعهٔ رئوس آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ رئوس گراف  $G$  و مجموعهٔ یال‌های آن زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ یال‌های  $G$  باشد. گراف  $G$  در جدول زیر را در نظر بگیرید، گراف‌های  $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5$  همگی زیرگراف‌هایی از  $G$  هستند:



**مسیر تمرینی:** 

مشابه این سوال در سوال ۱۳ امتحان نهایی ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

**مصتخ شو** 

الف) گرافی را که تنها از یک مسیر  $n$  رأسی تشکیل شده باشد با  $P_n$  نمایش می‌دهیم، پس کافی است تعداد رئوس گراف  $G$  را بشماریم. (۰.۲۵)  $n = 7$  (صفحه ۳۹)  
 ب)  $N_G(e) = \{d, f\}$  (۰.۲۵)  
 ج)  $N_G[a] = \{a, b\}$  (۰.۲۵)  
 د) ۲ مسیر،  $bcdefg$  و  $abcdef$  (۰.۲۵)

 سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

**مصتخ شو** 

الف) گراف  $5$  منتظم از مرتبه  $p$  است، بنابراین: (صفحه ۳۹)  
 $\sum_{v_i \in V(G)} \deg v_i = 5 \times p = 2q(G) \Rightarrow 5p = 2q \Rightarrow q = \frac{5}{2}p$  (\*) (۰.۲۵)  
 $4q - 7p = 30 \xrightarrow{(*)} 3p = 30 \Rightarrow p = 10 \Rightarrow q = 25$  (۰.۲۵)

	<p>(ب) چون گراف از مرتبه <math>p=10</math> است و گراف کامل <math>K_{10}</math>، <math>\binom{10}{2} = 45</math> یال دارد، بنابراین باید <math>45 - 25 = 20</math> یال به گراف <math>G</math> اضافه کنیم.</p> <p><b>مسیر تمرینی:</b>  مشابه این سوال در سوال ۷ امتحان نهایی ۱۴۰۲ مطرح شده بود.</p> <p><b>سبز بودی یا قرمز؟</b> بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه </p>	
۱	<p><b>مصطح شو</b> </p> <p>الف) <math>debad</math> (۰.۵) (صفحه ۳۹)</p> <p><b>راهنمای مصحح:</b> </p> <p>به هر دور به طول ۴ دیگر، نمره تعلق می‌گیرد.</p> <p>(ب) از آن جا که گراف <math>G</math>، ۵ رأسی و <math>e</math> رأسی با درجه ۴ است، بنابراین <math>\deg_{\bar{G}}(e) = 0</math> که یعنی <math>e</math> در <math>\bar{G}</math> رأس ایزوله خواهد بود و در نتیجه <math>\bar{G}</math> ناهمبند است. (۰.۲۵)</p> <p><b>مسیر تمرینی:</b>  مشابه این سوال در سوال ۷ امتحان نهایی ۱۴۰۳ مطرح شده بود.</p> <p><b>سبز بودی یا قرمز؟</b> بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه </p>	۱۶
۲۰	موفق باشید.	